52. బీజగణితం అదనపు సమాచారం

సూత్రాలు ఉపయోగాలు :-

సూత్రము :-

* సమస్య సాధనకు తరచుగా ఉపయోగించే సమీకరణంను సూత్రాలు అంటారు.
* సూత్రాలు 2 లేక అంతకంటే ఎక్కువ చరరాసుల మధ్య సంబంధంను తెలుపును.
* బారువడ్డీ $= \frac{PTR}{100}$ $\quad A = l \times b$

కర్త :-

* సమానత్వపు గుర్తును ఎడమవైపు ఒంటరిగా ఉండే అవ్యక్త రాశినే కర్త అంటారు.

$A = \frac{lr}{2}$ నందు కర్త A

* ఒక సూత్రంలో కర్తను మార్చడం వల్ల ఏర్పడే సూత్రాలను సహాయక లేదా రూపాంతర సూత్రాలు అంటారు.
* $v = lbh \qquad l = \frac{v}{bh}$

$b = \frac{v}{lh} \qquad h = \frac{v}{lb}$

కర్త యొక్క ముఖ్య లక్షణాలు :-

1. కర్త సమానత్వపు గుర్తుకు ఎడమవైపు ఉంటుంది.
2. ఇది ఇతర రాశులతో కలసి గాక ఎడమవైపు ఒంటరిగా ఉంటుంది.
3. కర్త యొక్క గుణకం ఎల్లప్పుడూ 1
4. సాధారణ సమీకరణాలను సాధించడానికి ఉపయగించే ధర్మాలన్నింటినీ సూత్రం నందు కర్తను మార్చి వ్రాయడానికి కూడా ఉపయోగించవచ్చు.

* $I = \frac{PTR}{100}$ యొక్క అన్ని సహాయక సూత్రాలను వ్రాయుము.

$P = \frac{100I}{TR} \qquad T = \frac{100I}{PT} \qquad R = \frac{100I}{PR}$

* $A = \frac{1}{2}d(a+b)$ సహాయక సూత్రాలు వ్రాయుము.

$d = \frac{2A}{a+b} \qquad a = \frac{2A}{d} - b \qquad b = \frac{2A}{d} - a$

* $C = \frac{5}{9}(F-32)$ F ను కర్తగా మార్చి $C = 100^0$ అయిన $F = 212^0 F$

$\frac{9C}{5} = F - 32 \qquad 32 + \frac{9C}{5} = F$

$100=\frac{5}{9}(F-32)$ $32+\frac{9}{5}\times 100=F$

$32+180=F$ $212^0=F$

❄ $l=\frac{x}{360}2\pi r$ నందు r కర్తగా చేయగా

$r=\frac{360l}{x}\times\frac{1}{2\pi}$

❄ $\frac{1}{f}=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$ అయిన F ను కర్తగా మార్చి $u=4cm, v=3cm$ అయిన F విలువ

$\frac{1}{f}=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$ $\frac{1}{f}=\frac{u+v}{uv}$ $f=\frac{uv}{u+v}$

$F=\frac{4\times 3}{4+3}$ $=\frac{12}{7}$

❄ $S=2\pi r(r+h)$ నందు h ను కర్తగా మార్చి $S=220$ చ.ప్ర॥ $r=3.5$ ప్రమాణాలైన విలువను కనుగొనుము.

$2\pi r(r+h)=S$

$r+h=\frac{S}{2\pi r}$ $h=\frac{S}{2\pi r}-r$

$=\frac{220}{2\times\frac{22}{7}\times 3.5}-3.5$ $=\frac{220\times 7}{2\times 22\times 3.5}-3.5$

$=5\times 2-3.5$ $=10-3.5$ $=6.5$

❄ 4×3 వల చిత్రం నందు 1సెం.మీ భుజంగల చతురస్రాల సంఖ్య 12

❄ $x\times y$ వల చిత్రం నందు 1 సెం.మీ భుజంగల చతురస్రాల సంఖ్య $x\times y$

❄ 4×3 వల చిత్రం నందు 2 సరళ రేఖలు ఖండించుకొను లేదా కలియు బిందువుల సంఖ్య $=5\times 4=20$

❄ $x\times y$ వల చిత్రం నందు 2 సరళ రేఖలు ఖండినిచుకొనును లేదా కలియు బిందువుల సంఖ్య

$p=(x+1)(y+1)$

❄ 2×2 యూనిట్‌ల చతురస్రాల వల చిత్రంలో మొత్తం ఎన్ని చతురస్రాలు ఉన్నాయి 5

❄ $k\times k$ వల చిత్రం నందు ఉండే మొత్తం చతురస్రాల సంఖ్య

$$=1^2+2^2+3^2.........+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

❄ 10×10 వల చిత్రంలో ఉండే చతురస్రాల సంఖ్య

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \frac{10(10+1)(2\times 10+1)}{6}$$

$$\frac{10\times11\times21}{6}=385$$

కర్ణాల సంఖ్య

* ఒక చతుర్భుజం నందు కర్ణాల సంఖ్య 2
* n భుజాలు కల్గిన బహుభుజి యొక్క కర్ణాల సంఖ్య $=\frac{n(n-1)}{2}-n\ (or)\ \frac{n(n-3)}{2}$

సమీకరణాలు - అసమీకరణాలు

సమానత్వపు ధర్మాలు :-

1. పరావర్తన ధర్మం (లేదా) స్వతుల్య ధర్మం :-

* ప్రతి సంఖ్య x దానికదే సమానమవుతుంది. దానినే పరావర్తన ధర్మం అంటారు.

ఉదా :- $6=6$

2. సౌష్టవ ధర్మం :-

* ఒక సంఖ్య మరొక సంఖ్యకు సమానమయిన 2వ సంఖ్య మొదటి సంఖ్యకు సమానమవుతుంది.
* a,b లు రెండు సంఖ్యలై $a=b$ అయితే $b=a$ అవుతుంది.

ఉదా :- $5+4=7+2$

3. సంక్రమణ ధర్మం :-

* ఒక సంఖ్య 2వ దానికి సమానమైన 2వ సంఖ్య 3వ దానికి సమానమైతే మొదటి సంఖ్య 3వ దానికి సమానమవుతుంది.
* a,b,c లు మూడు సంఖ్యలై $a=b, b=c$ అయితే $a=c$ అవుతుంది.
* ఒకే సంఖ్య విడిగా రెండు సంఖ్యలకు సమానమైన ఆ రెండు సంఖ్యలు సమానము.

x,a,b లు మూడు సంఖ్యలై $x=a, x=b$ అయితే $a=b$ అవుతుంది.

* సమీకరణంలో పదములు ఒకవైపు నుండి మరొకవైపునకు తీసుకొని వెళ్లటను తరలించుట లేదా పక్షాంతర స్థాపన అంటారు (*Transportation*)

అసమానత్వపు ధర్మాలు :-

* $a\neq b$ అనగా $a<b$ లేదా $a>b$
* $x<0$ అనగా x ఒక ఋణ సంఖ్య
* $x>0$ అనగా x ఒక ధన సంఖ్య
* అసమానత్వంనకు ఇరువైపులా ఒక ఋణ సంఖ్యతే గుణించిన లేదా భాగించిన ఆ అసమానత్వపు క్రమం మారుతుంది.
* అసమానత్వంలోని రెండు వైపులా ఒకే గుర్తులు గల రాసులకు గుణకార విలోమాలు తీసుకున్న అసమానత్వపు

క్రమం మారుతుంది.

* $4<5$ అయిన $\frac{1}{4}>\frac{1}{5}$

❋ $a<b$ అయిన $b>a$

అసమానత్వం సౌష్టవ ధర్మంను పాటించదు.

బీజీయ సమాసాలు – వర్గమూలాలు :-

చలరాశి x యొక్క వర్గం x^2, ఇక్కడ x ని x^2 యొక్క వర్గమూలమంటారు.

$(ab)^2 = a^2b^2$

$\sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = ab$

I. ఏకపదుల వర్గమూలం

1. $\sqrt{100x^2y^2} = 10xy^2$ 2. $\sqrt{\dfrac{27a^3}{48ab^4}} = \dfrac{3a}{4b^2}$ 3. $\sqrt{a^{2n+2}.b^{2n+4}.c^{2n+6}} = a^{n+1}.b^{n+2}.c^{n+3}$

II. ప్రత్యేక లబ్ధాల ఆధారంగా వర్గమూలాలు

1. $\sqrt{9a^2+24ab^2+16b^2} = 3a+4b$ 2. $\sqrt{36x^2+60xy+25y^2} = 6x+5y$

3. $\sqrt{x^2-2+\dfrac{1}{x^2}} = x-\dfrac{1}{x}$ 4. $\sqrt{9a^2+4b^2+c^2+2ab-4bc-6ca} = 3a+2b-c$

III. భాగాహార పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలం కనుగొనుట

క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా ఆ పద్ధతిని సోదాహరణంగా వివరిద్దాం.

1. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$ యొక్క వర్గమూలాలను కనుగొనండి.

$$
\begin{array}{l}
x^2)\,x^4-2x^3+3x^2-2x+1\,(x^2-x+1 \\
\quad x^4 \\
\hline
2x^2-x)\ -2x^3+3x^2 \\
\qquad\quad -2x^3+x^2 \\
\hline
2x^2-2x+1)\quad 2x^2-2x+1 \\
\qquad\qquad\quad 2x^2-2x+1 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

సాధించిన పద్ధతి :

1. దత్త సమాసాన్ని x యొక్క ఘాతాల అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయండి.

2. అందులో మొదటి పదం యొక్క వర్గమూలం కనుగొనండి.

పై ఉదాహరణలో మొదటి పదం x^4 దాని వర్గమూలం x^2. ఇది కనుగొనవలసిన వర్గమూలాలలో మొదటి పదం అవుతుంది.

3. x^2 యొక్క వర్గం, x^4 ని మొదటి పదం క్రింద వ్రాసి తీసివేయండి. సున్నా వస్తుంది. దత్త సమాసంలోని తరువాతి రెండు పదాలు $-2x^3+3x^2$ ని క్రింద వ్రాస్తే తరువాత మెట్టుకిది విభాజ్యం. వర్గమూలంలోని మొదటి పదం x^2 కి రెట్టింపు $2x^2$ అనేది తరువాత విభాజకంలోని మొదటి పదంగా వ్రాయండి.

విభాజ్యం $-2x^3+3x^2$లోని మొదటి పదం $-2x^3$ని క్రొత్త విభాజకంలోని మొదటి పదం $2x^2$చే భాగిస్తే $-x$ భాగఫలం వస్తుంది. ఇప్పుడు $-x$ అనేది వర్గమూలంలోని రెండవ పదం మరియు విభాజకంలోని రెండవ పదమూ అవుతుంది.

4. ఈ విధంగా క్రొత్త విభాజకం $2x^2-x$ అవుతుంది. దీన్ని $(-x)$ చే గుణించి, లబ్ధం $-2x^3+x^2$ ని రెండో విభాజ్యం $-2x^3+3x^2$ క్రిందుగా వ్రాసి తీసివేయండి. అలా చేయగా వస్తుంది.
5. దత్త సమాసంలోని మిగిలిన రెండు పదాలను తీసుకొని $2x^2-2x+1$ తో కొత్త విభాజ్యంఇని వ్రాయండి.
6. (x^2-x) ని 2చే గుణిస్తే, కొత్త విభాజకంలో మొదటి రెండు పదాలు $2x^2-2x$ వస్తాయి.
7. $2x^2-2x+1$ లోని మొదటి పదాన్ని, క్రొత్త విభాజకంలోని మొదటిపదం $2x^2$చే భాగిస్తే భాగఫలం వస్తుంది. ఇది వర్గమూలంలో మూడవ పదమూ, మరియు క్రొత్త విభాజకంలోని మూడవ పదమూ అవుతుంది.
8. కొత్త విభాజకంలోని పదాలను 1చే గుణించి కొత్త విభాజ్యం నుండి తీసివేయండి.
9. శేషం సున్నా.

$\therefore$ వర్గమూలం x^2-x+1

★ క్రింది వాటికి వర్గమూలాలు వ్రాయండి.

1. $x^4-4x^3+10x^2-12x+9$
2. $4x^4-12x^3+25x^2-24x+16$
3. $x^6+8x^4-2x^3+16x^2-8x+1$
4. $x^4+\frac{1}{x^4}-4x^2-\frac{4}{x^2}+6$

IV. అనిర్ధారిత గుణకాల పద్ధతిన వర్గమూలం కనుగొనుట

★ $x^4+6x^3+17x^2+24x+16$ యొక్క వర్గమూలమెంత ?

దత్త సమాసము 4వ పరిమాణ సమాసము కావున దీని వర్గమూలము ఒక వర్గ సమాసమగును.

$x^4+6x^3+17x^2+24x+16=(x^2+lx+m)^2$ అనుకుంటే

$=x^4+2lx^3+x^2(l^2+2m)+2lmx+m^2$

ఇరువైపులా x గుణకాలను పోల్చగా,

$2l=6,\ l^2+2m=17,\ 2lm=24,\ m^2=16$ల నుండి

$l=3,\ m=4$ అవుతుంది.

$\therefore x^4+6x^3+17x^2+24x+16$ యొక్క వర్గమూలం $=(x^2+3x+4)$

53 బహుపదులు

KEY CONCEPTS :

1. **సమఘాత సమాసము :** ఒక బీజీయ సమాసంలోని పదాలన్నింటి పరిమాణాలు సమానమైతే అట్టి సమాసాన్ని సమఘాత సమాసం అంటారు.

ఉదా : (i) $ax + by$, x, y లలో ప్రథమ పరిమాణ సమఘాత సమాసము.

(ii) $ax^2 + 2bxy + cy^2$, x, y లలో ద్వితీయ పరిమాణ సమఘాత సమాసము.

2. **సంపూర్ణ సమఘాత సమాసము :** ఒక సమఘాత సమాసంలో వీలైన అన్నిపదాలు ఉంటే దానిని సంపూర్ణ సమఘాత సమాసం అంటారు.

ఉదా : (i) $ax^2 + by^2$ అనేది ద్విపరిమాణ సమఘాత సమాసం కానీ సంపూర్ణం కాదు. అందుచే $ax^2 + 2hxy + by^2$ అనేది సంపూర్ణ సమఘాత సమాసం అగును

గమనిక :

1. రెండు సమఘాతాల సమాసాల లబ్ధం ఒక సమఘాత సమాసం.
2. దీని విపర్యము అనగా ఒక సమఘాత సమాసాన్ని రెండు బీజీయ సమాసాల వ్రాసిన అందులో ప్రతిదీ సమఘాతమే అనేది నిజం.
3. దాని పరిమాణం, లబ్ధంలోని సమాసాల పరిమాణాల మొత్తానికి సమానం.

3. **సౌష్టవ సమాసం :** $f(x,y)$ బీజీయ సమాసం అవుతూ $f(x,y) = f(y,x)$ అయినచో $f(x,y)$ ను సౌష్టవ సమాసం అందురు

Ex. : $ax^2 + 2hxy + ay^2$

గమనిక : ఒక బీజీయ సమాసం సౌష్టవ కావడానికి పదాల గుణకాలకు ప్రాముఖ్యం ఉంటే, సమఘాతం కావడానికి పదాల పరిమాణాలకు ప్రాముఖ్యత ఉంటుంది

4. I. **సమఘాత సౌష్టవ సమాసము :** ఒక సమాసం, సమఘాతము మరియు సౌష్టవము రెండూ అయితే దానిని సమఘాత సౌష్టవ సమాసం అంటారు.

$f(x, y, z)$ అనేది x, y, z లలో ఒక బీజీయ సమాసము. $f(x,y,z) = f(y,x,z)$ అయిన $f(x,y,z)$ ను x,y లలో సౌష్టవ సమాసం అంటారు.

II. **పరమ సౌష్టవ సమాసం :** ఒక బీజీయ సమాసం $f(x,y,z)$ x,y ల దృష్ట్యా, y,z ల దృష్ట్యా, మరియు z, x ల దృష్ట్యా, సౌష్టవము అయితే దానిని పరమ సౌష్టవ సమాసం అంటారు.

ఉదా : $f(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + az^2 + 2bxyz$

రెండు సౌష్టవసమాసాల మొత్తం లబ్ధం, బేధం విభక్తములన్నీ సౌష్టవాలే.

5. **చక్రీయ సమాసము :** x, y, z లలో ఒక సమాసము $f(x, y, z)$ అనేది $f(y, z, x) = f(z,y,x) = f(z,x,y)$ అయితే $f(x,y,z)$ ను చక్రీయ సమాసము అంటారు.

ఉదా : i. $f(x, y, z) = \sum x^2(y-z) = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$

ii. $f(a,b,c) = \pi(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)$

6. a,b,c లలో ఒక సమఘాత సౌష్టవ చక్రీయ సమాసము ఉన్న దానికి (a+b) లేదా (a-b) రూపంలోని మూడు ప్రథమ పరిమాణ సమాసాలతో బాటు అసమాసము.

1. తృతీయ పరిమాణమైన ఒక అంక కారణాంకము
2. నాల్గవ పరిమాణమైన K (a + b + c) రూపములో ఒక కారణాంకము.
3. 5వ పరిమాణమైన $K (a^2 + b^2 + c^2) + l (ab + bc + ca)$ రూపములో ఒక కారణాంకము - అదనంగా ఉంటాయి.

7. 1. **వర్గ సమాసం** : $a, b, c \in R, a \neq 0$ అయిన $ax^2 + bx + c$ ను వర్గ సమాసము అంటారు.

2. **వర్గ సమీకరణం** : $a, b, c \in R, a \neq 0$ అయిన $ax^2 + bx + c = 0$ ను వర్గ సమీకరణం అంటారు.

3. వర్గ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ కు రెండు మూలాలు మాత్రమే ఉంటాయి అవి :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{అనగా}$$

1. $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 2. $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

8. $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణానికి α, β లు మూలాలు అయిన

(i) $\alpha + \beta = -b/a$ (ii) $\alpha\beta = c/a$

(iii) $\alpha^2 + \beta^2 = (b^2 - 2ac) / a^2$ (iv) $\alpha^3 + \beta^3 = (3abc - b^3) / a^3$

(v) $\alpha/\beta + \beta/\alpha = (b^2 - 2ac) / ac$ (vi) $1/\alpha + 1/\beta = -b/c$

(vii) $(\alpha - \beta)^2 = (b^2 - 4ac / a^2)$ (viii) $\sqrt{\alpha/\beta} + \sqrt{\beta/\alpha} = -b / \sqrt{ac}$

9. 1. $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణంలో $a + b + c = 0$ అయిన మూలాలు, 1, c/a

2. $a + b + c = 0$ అవుతూ మూలాలు సమానమైన $c = a$

3. ఒక మూలము రెండవదాని వ్యుత్క్రమమైన $c = a$

10. $ax^2 + bx + c = 0$ కు α, β లు మూలాలు అయితే.

$ax^2 + bx + c = a (x - \alpha) (x - \beta)$

11. α, β లు మూలాలుగా గల్గిన వర్గ సమీకరణం $(x-\alpha) (x-\beta) = 0$ లేదా $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$ అనగా

x^2 - (మూలాలు మొత్తం) x + మూలాల లబ్ధం = 0

12. $ax^2 + bx + c = 0$ మరియు $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ వర్గ సమీకరణాలకు ఒకే మూలాలు ఉన్నచో $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$

13. **విచక్షిణి :** $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in R$ వర్గ సమీకరణానికి $\Delta = b^2 - 4ac$ ని విచక్షిణి అంటారు.

మూలాల స్వభావము	నియమం
1. వాస్తవాలు, అసమానాలు	1. $b^2 - 4ac > 0$
2. వాస్తవాలు, సమానాలు	2. $b^2 - 4ac = 0$
3. కల్పిత సంఖ్యలు లేక సంకీర్ణ సంఖ్యలు	3. $b^2 - 4ac < 0$
4. అకరణీయాలు, అసమానాలు	4. $b^2 - 4ac$ ఒక సంపూర్ణ వర్గం

మూలాల స్వభావవ	నియమం
5. రెండు మూలాలు సంఖ్యాపరంగా సమానం. గుర్తులలో వ్యతిరేఖం.	5. b = 0
6. ఒక దానికొకటి వ్యుత్క్రమాలు అనగా గుణకార విలోమాలు.	6. a = c
7. రెండునూ ధనాత్మకాలు	7. a, c, లు రెండునూ ఒకే గుర్తు కలిగి, b గుర్తుతో వ్యతిరేఖ
8. రెండునూ ఋణాత్మకాలు	8. a, b, c లు మూడూ ఒకే గుర్తును కలిగి ఉండుట
9. గుర్తులు ఒకదానికొకటి వ్యతిరేఖం	9. a మరియు c లు వ్యతిరేక గుర్తులు కలిగి ఉండుట
10. ఒక మూలం = 0	10. C = 0
11. రెండు మూలాలు సున్నా	11. b = 0, c = 0.

14. $ax^2 + bx + c = 0$ సమీకరణంకు α, β లు మూలాలు మరియు $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ అయిన

1. $1/\alpha, 1/\beta$ లు మూలాలుగా కల్గిన వర్గసమీకరణం $x^2 - bx + c = 0$ మరియు $f(1/x) = 0$
2. $-\alpha, -\beta$ లు మూలాలుగా వర్గ సమీకరణం $ax^2 - bx + c = 0$ మరియు $f(-x) = 0$
3. $K\alpha, K\beta$ లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం $ax^2 + Kbx + K^2c = 0$ మరియు $f(x/K) = 0$
4. $\alpha + K, \beta + K$ మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం.

   $a(x-K)^2 + b(x-K) + c = 0$ మరియు $f(x - K) = 0$

15. **శేష సిద్ధాంతము:** x లో ఒక అకరణీయ పూర్ణాంకిక సమానము f (x) ను (x-a) చే బాగించగా వచ్చే శేషము f (a) అగును. దీనినే శేష సిద్ధాంతము అంటారు.

ఉదా : $f(x) = 2x^3 - x + 4$ ను (x - 1) చే భాగించగా వచ్చు శేషము. $f(1) = 2(1)^3 - (1) + 4 = 2-1+4 = 5$

<u>NOTE :</u> f (x) ను (x – a) చే భాగిస్తే వచ్చు భాగఫలం Q (x) శేషము R అయిన $f(x) = (x-a)\ Q(x) + R$

$$f(x) = (x-a)\ Q(x) + f(a)$$

శేష సిద్ధాంతమును ఈ విధంగా కూడా నిర్వచిస్తారు. చలరాశి x లో అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకాలుగా గల బహుపది f(x) తరగతి ≥ 1 అయిన $r \in R$ కు అనుగుణముగా $f(x) = (x-r)\ Q(x) + f(x)$ అయ్యేట్లు ఓ బహుపది Q (x) ఉంటుంది.

3. **కారణాంక సిద్ధాంతము:** చలరాశి x లో అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకాలుగా గల బహుపది f (x) మరియు f(a) = 0 అయిన (x – a), f (x) కు ఒక కారణాంకము దీనిని కారణాంక సిద్ధాంతము అంటారు.

ఉదా : f (x) నకు $f(-2/3) = 0$ అయిన f (x) కు 3x + 2 ఒక కారణాంకం.

4. $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \text{---------} + a_n$ అను బహుపదికి

a) x -1 ఒక కారణాంకము $\Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \text{----} a_n = 0$ అనగా f (x) లో అన్ని గుణకాల మొత్తం సున్నా అయితే f(x) కు (x-1) ఒక కారణాంకము.

b) x - 1 ఒక కారణాంకము $\Leftrightarrow a_0 + a_2 + a_4 + \text{------} = a_1 + a_3 + a_5 \text{----------}$ అనగా f (x) లో x యొక్క సరిఘాతాంకాల గుణకాల మొత్తం, బేసి ఘాతాంకాల గుణకాల మొత్తానికి సమానమైతే f (x) కు (x+1) ఒక కారణాంకము.

5. **హార్నర్ సంశ్లేషణ పద్ధతి :** ఒక సమాసాన్ని ప్రథమ పరిమాణ సమాసముచే గుణకాలుగా వ్రాసి భాగహారము చేయుట ద్వారా అన్ని కారణాంకాలు కనుగొను పద్ధతిని హార్నర్ సంశ్లేషణ పద్ధతి అంటారు.

54. వాస్తవ సంఖ్యామానము

నిర్వచనం :

x ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయితే, x మాపము లేదా పరమ మూల్యము(Absolute value) $|x|$ ను,

$|x| = x, x > 0$ అయినప్పుడు

$= -x, x<0$ అయినప్పుడు

$= 0, x=0$ అయినప్పుడు

గా నిర్వచిస్తారు. ఈ నిర్వచనం నుండి $|x|$ ఎప్పటికీ ఋణాత్మకం కాదని గమనించాలి.

★ $|2x-3|=7$ ను సాధించండి.

సాధన : $|2x-3|=7 \Rightarrow 2x-3=7$ లేదా $2x$-3=7

$2x$-3=7 అయితే, $2x=7+3=10 \Rightarrow x=5$;

$2x$-3=-7 అయితే, $2x= -7+3= -4 \Rightarrow x=-2$

★ $|6x\text{-}9x| = 0$ ను సాధించండి.

సాధన : $|6\text{-}9x| = 0 \Rightarrow 6\text{-}9x=0 \Rightarrow 9x = 16 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

★ $\left|\frac{7-2x}{4}\right| = 2$ ను సాధించండి.

సాధన :

$\left|\frac{7-2x}{4}\right| = 2 \Rightarrow \frac{7-2x}{4} = 2$ లేదా $\left(\frac{7-2x}{4}\right) = 2$

$\frac{7-2x}{4} = 2$ అయితే, $7-2x=8 \Rightarrow -2x=1 \Rightarrow x=\frac{-1}{2}$

$-\left(\frac{7-2x}{4}\right)=2$ అయితే $\frac{7-2x}{4}=-2 \Rightarrow 7-2x=-8$

$\Rightarrow -2x=-15 \Rightarrow x=\frac{15}{2}$

పరమూల్య అసమీకరణాల (ఆరోహణ మాదిరి):

a- ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్య అయినప్పుడు, $|x| \le a \Rightarrow x \le a$ లేదా $-x \le a$

$-x \le a \Rightarrow x \ge -a$ అనగా $-a \le x$: అప్పుడు $x \le a; -a \le x \Rightarrow -a \le x \le a$

★ $|x+1| < 6$ ను సాధించండి.

సాధన : పై చర్చ నుండి $(x+1)$ విలువ, -6 మరియు +6 ల మధ్య ఉంటుందని నిర్ధారిస్తాం.

అనగా $-6<(x+1)<6 \Rightarrow -6-1<x+1-1<6-1 \Rightarrow -7<x<5$

★ $|2x-3| \le 7$ ను సాధించండి.

సాధన :

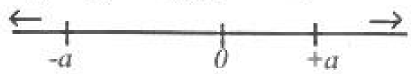
$|2x-3|\le 7$ అయినప్పుడు (2x-3), -7, +7 ల మధ్య ఉంటుందని (-7, +7లతో సహా) నిర్ధారిస్తాం.

అనగా $-7\le 2x-3\le 7 \Rightarrow -7+3\le 2x-3+3\le 7+3$

$-4\le 2x\le 10 \Rightarrow 2\le x\le 5$

పరమమూల్య అసమీకరణాలు (అవరోహణ మాదిరి):

$|x|>a$ అనుకొందాం. అప్పుడు నిర్వచనం నుండి $x<a$ లేదా $-x<a$ కావలె. అనగా $x>a$ లేదా ఈ $x<-a$ విధంగా a ధనాత్మకం అయితే, $|x|>a$ అయినప్పుడు x వాస్తవరేఖపై $-a$ కంటే తక్కువ విలువలను తీసుకుంటుంది. లేదా $-x$ వాస్తవరేఖపై a కంటే ఎక్కువ విలువలను తీసుకుంటుంది. ఈ విషయాన్ని వాస్తవరేఖపై క్రింది విధంగా చూపించవచ్చు.



★ $|x|>2$ ను సాధించండి.

సాధన :

$|x|>2 \Rightarrow x>2$ లేదా $-x>2$; అనగా $x>2$ లేదా $x<-2$

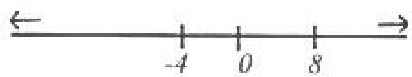
★ $|x-2|>6$ ను సాధించండి.

సాధన :

$|x-2|>6$ అనగా $(x-2)>6$ లేదా $(x-2)<-6$ అవుతుందని మనకు తెలుసు.

$x-2>6$ అయితే, $x-2+2>6+2 \Rightarrow x>8$;

$x-2<-6$ అయితే, $x-2+2>-6+2 \Rightarrow x<-4$



★ $\left|2-\frac{x}{3}\right|\ge 4$ ను సాధించండి.

సాధన : $\left|2-\frac{x}{3}\right|\ge 4 \Rightarrow \left(2-\frac{x}{3}\right)\ge 4$ లేదా $\left(2-\frac{x}{3}\right)\le -4$ కావలె.

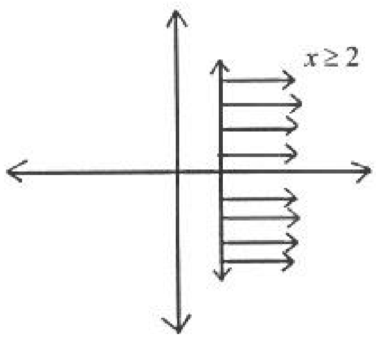
$$2-\frac{x}{3}\ge 4 \Rightarrow 2-\frac{x}{3}-2\ge 4-2 \Rightarrow \frac{-x}{3}\ge 2 \Rightarrow -x\ge 6 \Rightarrow x\le -6$$

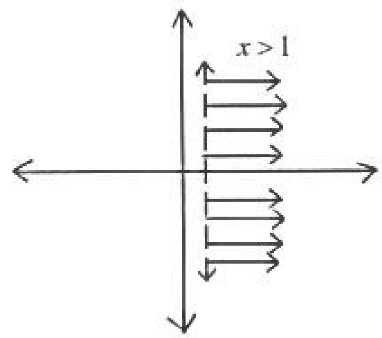
$$2-\frac{x}{3}\le -4 \Rightarrow 2-\frac{x}{3}-2\le -4-2 \Rightarrow \frac{-x}{3}\le -6 \Rightarrow -x\le -18 \Rightarrow x\ge 18$$

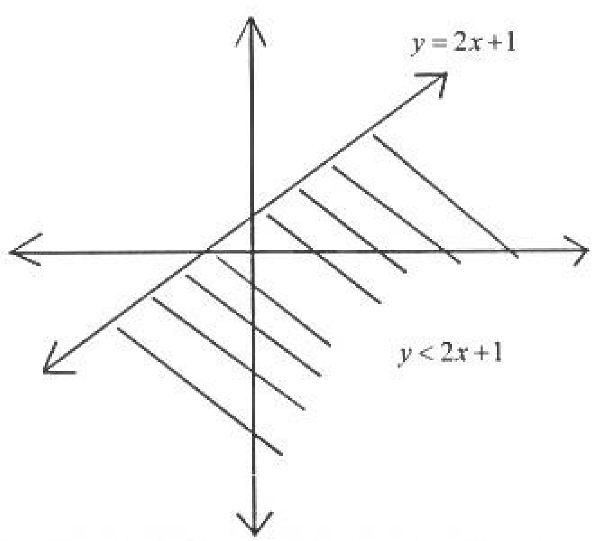
రేఖీయ అసమీకరణాలు - చిత్రాలు

$x = k$ మరియు $k \in R$ అనేది y- అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖ మరియు ఈ సరళరేఖ తలాన్ని రెండు అర్ధతలాలుగా విభజిస్తుంది. వాటిని $x > k$, $x < k$ అర్ధతలాలు అంటారు. $x = k$ రేఖ ఆ రెండు అర్ధతలాలకు చెందదు. $x=k$ రేఖను ఆ తలాలకు సరిహద్దు రేఖ అంటారు.

ఒక అర్ధతలం సరిహద్దు రేఖతో కలిసి ఉంటే దానిని సంవృత అర్ధతలం అంటారు. సరిహద్దు రేఖ కలియకుండా ఉంటే ఆ అర్ధతలాన్ని అసంవృత అర్ధతలం అంటారు. అసంవృత అర్ధతలాన్ని సరిహద్దు రేఖను చిన్న చిన్న గీతలతో - - - - తో సూచిస్తాం.







55 రేఖీయ ప్రమేయాలు

1. $y = mx$ గ్రాఫు లక్షణాలు.

   1) ఈ రేఖాచిత్రం ఆది బిందువు గుండా పోవును.

   2) సరళరేఖా చిత్ర

   3) ఇందు m ను వాలు అంటారు. $m = y / x$

   4) m ధనాత్మకమైన రేఖ 1,3 పాదాల గుండాను, m ఋణాత్మకమైన రేఖ 2,4 పాదాల గుండా పోవును.

   5) నిర్మించుటకు ఒక బిందు నిరూపకం చాలును.

2. $y = mx+c$ గ్రాఫు లక్షణాలు.

   1) దీనిని వాలు (m) అంతరఖండ (c) సమీకరణం అంటారు.

   2) ఈ రేఖా చిత్రం ఆది బిందువు గుండా పోదు.

   3) సరళరేఖా చిత్రం. ఈ రేఖా ఎ ల్లం y అక్షాన్ని (0,c) వద్ద ఖండించును.

   4) దీనిని నిర్మించుటకు కనీసం 2 బిందు నిరూపకాలు కావాలి.

3. వాలులు సమానంగా ఉండే సరళరేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి. విపర్యయంగా రేఖలు సమాంతరాలయిన వాటి వాలులు సమానం.

4. $y = 0$ రేఖ వాలు కనుగొనుట.

   1) $y = 0$ రేఖ అంటే x అక్షం.

   2) x అక్షం పై ఉండే ప్రతి ద్వితీయ నిరూపకం $y = 0$ కనుక $y = 0$ ను $y = mx + c$ రూపంలో వ్రాస్తే $y = 0, x+0$ రేఖ వాలు = x యొక్క గుణకం = 0.

   $\therefore$ x అక్షం వాలు - 0.

5. $x = 0$ రేఖ వాలు కనుగొనుట.

   1) $x = 0$ అంటే y అక్షం.

   2) y అక్షం పై ఉండే ప్రతి ప్రథమ నిరూపకం $x = 0$ అగును.

   3) $y = mx + c$ ద్వారా $mx = y-c$.

   $$\therefore m = \frac{y-c}{x}$$

   $x = 0$ కావున $m = y-c / 0$ (0 చే భాగాహారం నిర్వచింపబడదు) కావున y అక్షం వాలు నిర్వచింపబడదు.

6. సమీకరణాల వ్యవస్థకు సాధన సమితిని గ్రాపుద్వారా కనుగొని, బీజ గణిత పద్ధతిలో జవాబును సరిచూడవచ్చు.

7. $y = k$ రేఖ అనగా x - అక్షముకు సమాంతరము 'K' యూనిట్ల దూరములో వుండే సరళరేఖ. ఈ సరళరేఖవాలు '0'

8. $x = k$ సరళరేఖవాలు నిర్వచించలేము.

9. 1. వాలు అనునది Y నిరూపకానికి, x నిరూపకానికి గల నిష్పత్తి, వాలు = $m = y / x$

56. సమితులు, సంబంధాలు

- జార్జి కాంటర్ (1845 - 1918)

సమితి : సునిర్వచిత వస్తువుల సముదాయాన్నే సమితి అంటారు.

ఉదా : 1. సహజ సంఖ్యల సముదాయము. (N ={1,2,3,4,.........})

2. Moon పదములోని అక్షరములు ({M,O, N})

గమనిక :

1. సమితులను ఆంగ్ల వర్ణమాలలోని పెద్ద అక్షరములలో (A,B,C.....) సూచిస్తారు.

2. సమితిలోని వస్తువులను మూలకాలు అంటారు.

3. సమితులను కుండలీకరణాల్లో ({ }) ఉంచుతారు.

ఉదా : School పదములోని అక్షరములు ఇది ఒక సమితి. దీనిని ({S,C,H,O.,O,L}) గా సూచిస్తారు.

4. ఒక దత్త వస్తువు ఒక సమితికి చెందివుంటే $\in$ అనే గుర్తుతోనూ, చెంది ఉండకపోతే $\notin$ తోనూ సూచిస్తారు.

ఉదా : 1. $2 \in N$ 2) $-2 \notin N$

5. సందిగ్ధంగా ఉండే వాక్యాలు సమితులు కావు.

ఉదా : 1. India లో ముగ్గురు బలవంతులు 2. గ్రంథాలయంలో 5 మంచి పుస్తకాలు.

2. సమితులు వ్రాసే పద్ధతి.

1. రోస్టర్ రూపము లేదా జాబితా రూపము: మూలకాలన్నింటిని జాబితాగా { } బ్రాకెట్లలో ఉంచి, కామాలతో వేరు చేస్తూ వ్రాసే విధానాన్ని జాబితా పద్ధతి లేదా రోస్టర్ రూపమని అంటారు. ఉదా A = {1,2,3,4}

2. లాక్షణిక రూపము లేదా సమితి నిర్మాణ రూపము : సమితిని, దానిలోని మూలకాలన్నింటికి గల సామాన్య లక్షణమును అనుసరించి వ్రాయుటను సమితి రూపము లేదా లాక్షణిక రూపము అంటారు.

Ex : **A = {1,2,3,4,5}** యొక్క లాక్షణిక రూపమును

A = { x / X $\in$ N, x < 6 } OR A = { x / x $\in$ N, x $\le$ 5 } గా వ్రాస్తారు.

P = { 1,2,3,5,7,11,13,17,19 } యొక్క లాక్షణిక రూపము.

P = { x/x ఒక ప్రధాన సంఖ్య; x $\le$ 19 } or { x/x ఒక ప్రధాన సంఖ్య; x < 20 } గా వ్రాస్తారు.

EXERCISE :

1. దిగువ వానిలో ఏది సమితి కాదు? [3]

1. సహజ సంఖ్యాసమితి 2. వాస్తవసంఖ్యాసమితి 3. కొన్ని సంఖ్యల సముదాయం 4. None

సాధన : కొన్ని సంఖ్యల సముదాయాన్ని సమితి అని నిర్ణయించలేము.

2. దిగువ వానిలో ఏ ప్రవచనము సత్యము కాదు? [4]

1. $5 \in N$ 2. $-3 \in Z$ 3. $3 \in Q$ 4. $-2 \in W$

3. కార్డినల్ సంఖ్య : సమితిలో గల మూలకాల సంఖ్యను ఆ సమితి యొక్క కార్డినల్ సంఖ్య అంటారు. A సమితి యొక్క కార్డినల్ సంఖ్యను $n(A)$ తో సూచిస్తారు.

Ex : $A = \{a, b, c\}$ అయిన $n(A) = 3$

4. సమితుల రకాలు :

1. **పరిమిత సమితి :** ఒక సమితిలోని మూలకాల సంఖ్య పరిమితమైన అనగా లెక్కపెట్టగల్గిన ఆ సమితిని పరిమితసమితి అంటారు. Ex : $A = \{a,b,c\}$

2. **అపరిమిత సమితి :** ఒక సమితిలోని మూలకాల సంఖ్య అపరిమితమైన అనగా లెక్కి[illegible] సమితి అంటారు.

   EX : N = సహజసంఖ్యాసమితి $= \{1,2,3,4,\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha\}$

3. **శూన్యసమితి :** మూలకాలు లేనట్టి సమితిని 'శూన్యసమితి' అంటారు.

   దీనిని ϕ తో సూచిస్తారు. $\phi = \{\,\}$ మరియు $n(\phi) = 0$.

4. **తుల్యసమితులు :** A,B లను రెండు సమితులలో మూలకాల సంఖ్య సమానం అనగా

   $n(A) = n(B)$ అయితే A, B లను తుల్యసమితులు అంటారు. **(or)**

   A, B సమితుల మధ్య 'అన్వేక సాదృశ్యం' ఉంటే ఆ సమితులను ఆ సమితులను తుల్యసమితులు అంటారు.

   తుల్య సమితులను $A \sim B$ or $A <-> B$ గా సూచిస్తారు.

   గమనిక : రెండు సమితులు తుల్య సమితులైతే వాటి పరిమాణాలు సమానం అంటారు.

   ఉదా : $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$

   ఇక్కడ $n(A) = 3$, & $n(B) = 3$ కావున $A \sim B$ కానీ $A \neq B$ గమనించవలెను.

5. **సమసమితులు :** A సమితిలో గల మూలకాలన్నియూ B సమితిలో వుంటూ B సమితిలో గల మూలకాలన్నియూ A సమితిలో ఉంటే అట్టి సమితులను సమసమితులు అంటారు.

   ఉదా : $A = \{1,2,3,\ldots\ldots\}$ N = సహజసంఖ్యా సమితి. $A = N$

   సాధన : A, N సమితులలో మూలకాలు సమానం కాబట్టి A, N లు సమసమితులు.

   $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \neq B$

   సాధన : A, B సమితులందు ఒకే మూలకాలు లేవు కావున $A \neq B$

EXERCISE :

1. $A = \{2, 3, 5\}$ అయిన $A <-> B$ అగు B దిగువ వానిలో ఏది కావచ్చు? [C]

   a) $\{2,3,4,5\}$ b) $\{a,b,c,d\}$ c) $\{a,b,c\}$ d) $\{2,3\}$

2. ఈ దిగువ వానిలో శూన్య సమితిని గుర్తింపుము? [C]

   a) $\{x \in N / x > 6\}$ b) $\{x \in Z / X < -5\}$ c) $\{x \in N / -4 \leq x \leq 0\}$ d) $\{x \in R / -5 < x < 0\}$

సాధన : [$4 < x < 0$ నియమాన్ని తృప్తిపరిచే ఏ సహజ సంఖ్య లేదు కావున c) శూన్య సమితి.

6. ఉప సమితి : A సమితిలో వున్న ప్రతి మూలకము B సమితిలో వుంటే A ని B యొక్క ఉప సమితి అంటారు. దీనిని $A \subseteq B$ అని వ్రాస్తారు.

Ex : 1) A = {1,2,3} , B = {1,2,3,4} A, B కు ఉప సమితి అనగా $A \subset B$

2) x = {1,b,c,d}, y = {b,c,a,d}. x, Y కు ఉప సమితి అనగా $X \subseteq B$

గమనిక : n (A) = n అయిన A కు గల ఉప సమితి = 2^n

7. శుద్ధోప సమితి : A లోని మూలకాలన్నీ B లో ఉంటూ, A లో లేని కనీసం ఒక మూలకం అయినా B లో ఉంటే A ను B కు శుద్ధోప సమితి అంటారు. అనగా శుద్ధోప సమితిని $A \subset B$ తో సూచిస్తారు. (ఇక్కడ $A \neq B$).

Ex : A = {a,b,c}, B = {b,c,a,d} అయిన $A \subset B$

8. అగ్రసమితి లేక ఉన్నత సమితి : $A \subset B$ అయిన $B \supset A$ అని వ్రాస్తారు. B ను A కు ఉన్నత సమితి లేక అగ్రసమితి అంటారు.

NOTE : 1. శూన్యసమితి ఏ సమితికైనా ఉపసమితి. 2. $A \subset B$ మరియు $B \subset A$ అయిన A = B

9. క్రమోప సమితి : ఒక సమితికి గల ఉపసమితులలో ఆ సమితి, శూన్యసమితి తప్ప మిగిలిన వాటిని క్రమ ఉపసమితులు అంటారు.

NOTE : 1. n (A) = n అయిన A కు గల క్రమోప సమితుల సంఖ్య = 2^n-1

2. n (A) = 3 అయిన A కు గల క్రమోప సమితుల సంఖ్య = $2^3-1 = 7$

10. ఘాతసమితి : ఒక సమితి కి గల ఉపసమితులన్నింటిని మూలకాలుగా కలిగి ఉన్నట్టి సమితిని దత్తసమితికి ఘాతసమితి అంటారు. సమితి యొక్క దాని ఘాతసమితిని P(A) తో సూచిస్తారు.

NOTE : 1. ఒక సమితిలో 'N' మూలకాలుంటే దాని ఘాతసమితిలో 2^n మూలకాలుంటాయి.

2. n (A) = 3 అయిన n {P(A)} = 2^3 = 8

<u>EXERCISE :</u>

1. A = {a,b} అయిన దిగువ వానిలో A కు శుద్ధోప సమితి ఏది ? (2)

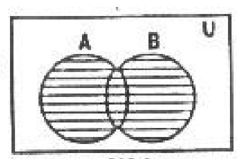
1. A 2. {a} 3. ϕ 4. {a,b,c}

2. n (A) = 5 అయిన A కు గల క్రమోప సమితుల సంఖ్య (4)

1.25 2. 32 3. 29 4. 30

3. $A \subset B$ అయిన B ను A కు .... అంటాము. (3)

1. ఉపసమితి 2. శుద్ధోప సమితి 3. అగ్రసమితి 4. ఘాతసమితి



A U B = పటంలో షేడ్ చేసిన మొత్తం భాగం

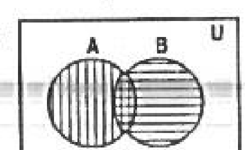
11. సమ్మేళన సమితి : సమితి A లో గానీ (లేక) సమితి B లో గానీ (లేక) రెండింటిలో గానీ ఉన్న మూలకాల సమితిని, A, B ల సమ్మేళన సమితి అంటారు. దీనిని A U B అని వ్రాస్తారు.

EX : A = {1,2,3}, B = { 2,4,5} అయిన A U B = {1,2,3,4,5} అగును. A U B యొక్క లాక్షణిక రూపం A U B = {x/x $\in$ A or x $\in$ B}

12. ఛేదన సమితి : సమితులు A, B లు రెండింటిలోనూ ఉమ్మడిగా ఉండు మూలకాలచే ఏర్పడు సమితిని ఛేదనసమితి అంటారు. దీనిని $A \cap B$ చే సూచిస్తాము.

Ex : A= {1,2,6}, B = {2,4,5} అయిన $A \cap B$ = {2}

$A \cap B$ యొక్క లాక్షణిక రూపము : $A \cap B$ = {x / x $\in$ A and X $\in$ B}

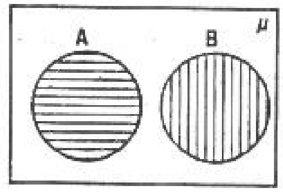


$A \cap B$ = పటంలో షేడ్ చేసిన వల భాగం మాత్రమే

13. వియుక్త సమితులు : A,B సమితులలో కనీసం ఒక్క మూలకమైనా ఉమ్మడిగా లేకుంటే ఆ సమితులను వియుక్త సమితులు అంటారు.

NOTE : 1. A, B లు వియుక్త సమితులయితే $A \cap B = \emptyset$

2. A, B లు వియుక్త సమితులయితే $n(A \cap B) = 0$



Ex : $A = \{2, 8, 6\}$, $B = \{3, 4, 7\}$, అయిన $A \cap B = \{\ \} = \emptyset$

అనగా A,B లలో కనీసం ఒక్క ఉమ్మడి మూలకం అయినా లేదు.

5. సమితుల భేదము : సమితి A లో ఉండి సమితి B లో లేని మూలకాలన్నింటితో ఏర్పడే సమితిని A − B గా వ్రాస్తారు. దీనిని A, B ల భేదము అంటారు.

Ex : 1. $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3,6,8\}$ అయిన $A - B = \{2, 4\}$

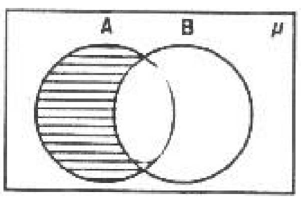
2. $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3,6,8\}$ అయిన $B - A = \{6, 8\}$

సమితుల భేదము యొక్క లాక్షణికరూపము :

1. $A - B = \{X / x \in A$ మరియు $x \in B\}$

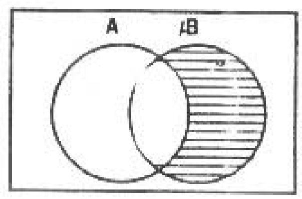
2. $B - A = \{x / x \in B$ మరియు $x \in A\}$

సమితుల భేధమును తెలియజేసే వెన్ చిత్రాలు :



A - B

A - B = పటంలో షేడ్ చేసిన భాగం



B - A

B - A = పటంలో షేడ్ చేసిన భాగం

గమనిక : సమితులపై $A - B \neq B - A$

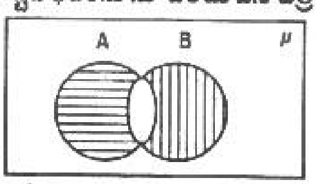
6. సమితుల సౌష్టవ భేదం : A, B లు రెండు సమితులైన $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ (or)

$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ ను A,B ల సౌష్టవ భేదం అంటారు.

EX : $A = \{2,3,4\}$, $B = \{3,6,8\}$ అయిన $A - B = \{2,4\}$, $B - A = \{6,8\}$ కావున

A, B ల సౌష్టవ భేదం $= A \Delta B = A - B = \{2,4\} \cup \{6,8\} = \{2,4,6,8\}$

సౌష్టవ భేదంను సూచించు వెన్ చిత్రాలు :



$A \Delta B$ = పటంలో షేడ్ చేసిన మొత్తం భాగం

Excercise :

1. $A = \{a,b,d\}$, $B = \{d,c,e\}$ అయిన $\{a, b\}$ చే సూచించబడు సమితి? [C]

a) $A \Delta B$ b) $A \cup B$ c) $A - B$ d) $B - A$

2. A U B యొక్క లాక్షణిక రూపము .... { x/x ∈ A V x ∈ B }

3. n (A ∩ B) = 0 అయిన సమితి A, B లను -------- అంటారు. [D]

a) సమ సమితులు b) తుల్య సమితులు c) ఛేధన సమితులు d) వియుక్త సమితులు

7. విశ్వ సమితి : సమితుల గూర్చిన ఒక చర్చలో దత్త సమితులన్నీ ఏ సమితికి ఉప సమితులులై ఉంటాయో ఆ సమితిని ఆ సందర్భానికి సంబంధించి విశ్వ సమితి అంటారు. దీనిని μ or U or W లచే సూచిస్తారు. దీనినే సార్వత్రిక సమితి అని కూడా అంటారు.

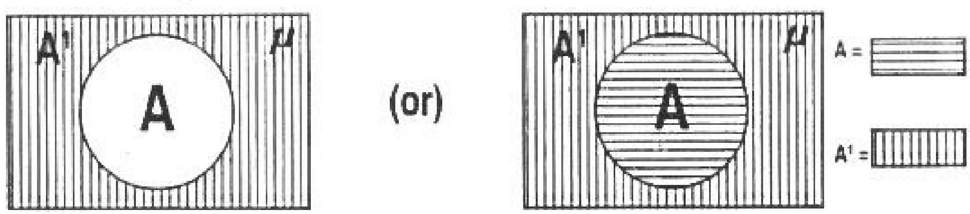
Ex : ఒక సమస్యలో సమితులు A = { 2, 3, -1 }, B = { 0, 6 }, C = { 4, 8, -5 } అయిన విశ్వసమితి పూర్ణ సంఖ్యా సమితి Z అవుతుంది.

8. పూరక సమితి : ఏదైనా ఒక సమితి A కు μ విశ్వ సమితి అయిన A' = μ - A గా వ్రాయబడిన A' ను A కు పూరక సమితి అంటారు దీనిని A' or A^c తో సూచిస్తారు.

Ex. μ = { 1, 2, 3, ...10 } , A = { 2,4,6,8,10 } అయిన A' or A^c = {1,3,5,7,9}

A' యొక్క లాక్షణిక రూపం : A' = { x / x ∈ μ మరియు x ∉ A }

పూరక సమితి వెన్ చిత్రం :



A' = పటంలో షేడ్ చేసిన మొత్తం బాగం.

EXERCISE :

1. μ = { 1, 2, 3, ...}, E = {x/x = 2n, n ∈ N } అయిన E' = -------------

జ. { 1, 3, 5, 7,........}

2. శూన్య సమితికి పూరక సమితి ----------- **(విశ్వసమితి)**

i.e. (∅' = μ)

3. విశ్వసమితి యొక్క పూరక సమితి ---- **(శూన్య సమితి)**

i.e. (μ' = ∅)

గమనిక : ఎ) A, B లు రెండు సమితులు

1. **A ∩ B ≠ ∅ అయిన n (AUB) = n (A) + n (B) - n (A ∩ B)**

2. **A ∩ B = ∅ అయిన n (AUB) = n (A) + n (B)**

బి) A, B C లు ఏవేని మూడు సమితులు అయిన

n (AUBUC) = n (A) + n (B) + n (C) - n (A ∩ B) - n (B ∩ C) - n (A ∩ C) + n (A ∩ B ∩ C)

9. సమితులు బీజ గణిత న్యాయాలు

1. అపవర్తిత న్యాయాలు	1. $A \cup A = A$
	2. $A \cap A = A$
2. స్థిత్యంతర లేదా వినిమయ న్యాయాలు.	1. $A \cup B = B \cup A$
	2. $A \cap B = B \cap A$
3. సహచర న్యాయయాలు :	1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
	2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. విభాగ న్యాయాలు :	1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
	2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. డీమోర్గాన్ న్యాయాలు :	1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
	2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
	3. $A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$
	4. $A - (B \cap C) = (A- b) \cup (A -C)$
6. తత్సమ న్యాయాలు :	1. $A \cup \emptyset = A$
	2. $A \cup \mu = \mu$
	3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
	4. $A \cap \mu = A$
7. పూరక న్యాయాలు :	1. $A \cup A' = \mu$
	2. $A \cap A' = \emptyset$
	3. $(A')' = A$
	4. $\mu' = \emptyset$
	5. $\emptyset' = \mu$

10. ద్వైత నియమము : సమితుల సమానత్వాన్ని సూచించే ఏ నియమాలలోనైనా $\cup$, $\cap$ మరియు $\emptyset$, μ లను తారుమారు చేయగా వచ్చే నియమం కూడా నిజమే దీనిని సమితులపై ద్వైత నియమము అంటారు.

Ex. $A \cup \emptyset = A$ సత్యము. ఇక్కడ $\cup$ కు బదులు $\cap$, $\emptyset$ కి బదులు μ మార్చగా వచ్చే నియమము $A \cap \mu = A$ ఇది కూడా సత్యమే.

11. అంతర్భాగ సమితి న్యాయాలు :

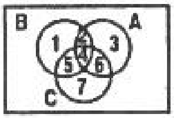
1. $A \subset A$ (పరావర్తన)
2. $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$ (ప్రతి సౌష్టవ)
3. $A \subset B, B \subset C, \Rightarrow A \subset C$ (సంక్రమణ)

ఈ మూడు ధర్మాలను అంతర్భాగ సమితి న్యాయాలు అంటారు.

గమనిక : 1. సమితి భావన, దాని ఉపయోగమును మొదట జర్మన్ గణిత శాస్త్రవేత్త జార్జి కాంటర్ (1845-1918) గుర్తించి సమితి వాదనను అభివృద్ధి పరిచాడు.

2. జాన్‌వెన్ (1834-1923) తన **సింబాలిక్ లాజిక్** అనే గ్రంథంలో ప్రతిపాదనలను పటము రూపములో ప్రాచుర్యంలోకి తెచ్చినాడు. వీటినే వెన్ చిత్రాలు అంటారు.

EXERCISE :

1. 

ప్రక్క పటమునుండి '5' వ భాగము సూచించునది ---------- $(A' \cap B \cap C)$

2. $x \in A-B$ లేక $x \in B-A$ అయిన $X \in$ ------------ $(A \Delta B)$

3. $x \in x$ లేక $x \in y$ అయిన $x \in$ ------ (XUY)

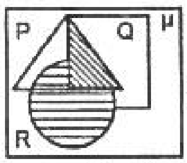
4. $n(A) = 15, n(B) = 3$ మరియు $n(AUB) = 8$ అయిన $n(A \cap B) =$ — (10)

5. $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ అయిన ----- $(A = B)$

6. $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{0,2,4,6\}$ అయిన $A \Delta B =$ ---- $\{0,1,3,5,6\}$

7. $A \cap B = AUB$ అయిన ---------- $(A = B)$

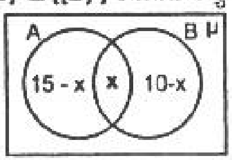
8. $A \subset B$ అయిన $AUB =$ --------- (B)

9. 

ప్రక్కపటంలో ఛాయావృత్త ప్రాంతం చూపించేది ---------- $(P \cap Q)\ UR$

10. A,B, C అనేవి సరేఖీయాలు కాని మూడు బిందువులైన $\overline{AB} \cap \overline{AC} =$ ---------- $[A]$

11. $\{\emptyset\} \subset \{\{\emptyset\}\}$ అనునది సత్యమేనా ------- **(అసత్యం)**

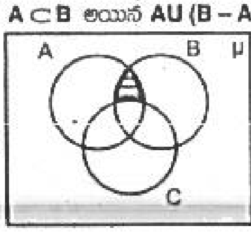
12. 

ప్రక్క పటంలో $n(A \cup B) = 24$ అయిన $x =$ -------- (1)

13. $A \cap B' =$ ------- $(B - A)$

14. $A \cap P = A$ అయిన $P =$ ------------ (A లేదా μ)

15. $A \subset B$ అయిన $AU(B - A) =$ -------- (B)

16. 

ప్రక్క పటంలో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతం = -------- $(A \cap B \cap C')$

17. $\{1\}$ యొక్క సమితి నిర్మాణరూపం = ------ $\{x/x \in N, X<2\}$

18. $A = \{x/x = 2n, n \in N\}$, $B = \{x/x = 2n-1, n \in N\}$ అయిన $A \cap B =$ ----- $(\emptyset)$

19. $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \emptyset$ అయిన ABCD చతుర్భుజము ఒక --------- **(ట్రెపీజియం)**

20. $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \emptyset, \overline{BC} \cap \overline{DA} = \emptyset$ అయిన ABCD చతుర్భుజము ఒక ---------- **(సమాంతర చతుర్భుజం)**

21. $\{\Delta ABC / \angle B > 90^\circ, \angle B > 90^\circ\}$ అనునది ------------- **(శూన్యసమితి)**

22. **A - (A∩ B) = ---------- (A- B)**

23. **(AUB)-B = ----------- (A- B)**

24. **A ∩ (B – C) = ------- [(A ∩ B)-C]**

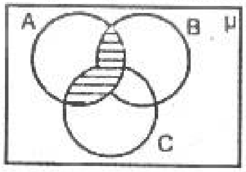
25. **n (P(A)) = 16** అయిన **n(A) = ---------- (4)**

26. **n(A) = 3, n(B) = 2** అయిన **n (P(A)-n(P(B)) = --------- (4)**

27. ఒక పరీక్షలో **A,B** అను రెండు విభాగాలు కలవు విభాగం **A** లో **50%** విభాగం **B** లో **50%** మంది తప్పిరి. **20%** మంది రెండు విభాగాలలోను తప్పిన రెండు విభాగలలోనూ ఉత్తీర్ణులయినవారి శాతము -------- **(20%)**

28. **n (A) = 8, n (B) = 5,** అయిన **A,B** ల గూర్చి నీవేమి చెప్పగలవు----- **(ఏదైనా నిర్ధారించుటకు)**

29. **n (A – B) = x, n (A B) = y,** మరియు **n (B – A) = Z** అయిన **n (A Δ B) = ------ (X + Z)**

30. 

ప్రక్క పటములో చాయావృత్త ప్రాంతం = ----------- **(A ∩ (BUC)**

31. సమితుల సమ్మేళనాలలో తత్సమాంశం........... (φ)

32. **AUA' = μ** అనే సమితి న్యాయానికి తుల్యమైన ప్రవచన నియమము............ **[(P ∩ V (P) = t]**

33. **A** లో 3 మూలకాలు **B** లో 6 మూలకాలు **A ⊂ B** అగునట్లు వున్నచో **AUB** లోని మూలకాల సంఖ్య............. **(6)**

34. **A= {X ; x,** 3 యొక్క గుణిజము**}, B = {x; x,** 5 యొక్క గుణిజము**}** అయిన **A∩ B = {15, 30, 45,..........}**

35. రెండు పరిమిత సమితులు **m** మరియు**n** మూలకాలు కల్గి ఉన్నాయి. మొదటి సమితికి ఉన్న మొత్తం ఉపసమితుల సంఖ్య రెండవ సమితికి ఉన్న మొత్తం ఉపసమితుల సంఖ్య కన్నా 56 ఎక్కువ అయిన **m,n** విలువలు వరుసగా .... **(6,3)**

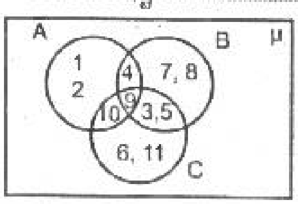
36. 52 మంది గల ఒకే సమూహంలో 16 మంది టీ త్రాగుదురు కానీ కాఫీ త్రాగరు. 32 మంది టీ త్రాగుదురు. అయిన కాఫీ మాత్రమే త్రాగి, టీ త్రాగనివారెందరు .... **(20)**

37. 100 మంది గల ఒక సమూహంలో 60 మంది మల్లెలను, 70 మంది జాజులను ఇష్టపడతారు. మల్లెలను, జాజులను రెండింటిని ఇష్టపడే వారిసంఖ్య **n** అయిన **n =** .... **(30)**

38. **A,B** అను రెండు సమితులకు **A ∩ (AUB) =** .... **(φ)**

39. **A ∩ B = A** మరియు **B ∩ C = B** అయిన **A ∩ C =** .... **(A)**

40. ఒక సర్వేలో 63% మంది హిందీ సినిమాలను మరియు 76% మంది తెలుగు సినిమాలను ఇష్టపడతారని తెలిసింది. అయిన రెండింటిని ఇష్టపడేవారు............................... **(39%)**

41. 

ప్రక్కపటము నుండి **n (A ∩ (BUC)) =** ....**(3)**

సంబంధాలు

I. క్రమయుగ్మం :- a, b అను రెండు మూలకాల జత (a,b) రూపంలో ఉన్న దానిని క్రమయుగ్మం అంటారు. ఇక్కడ క్రమం వ్రాయుటకు ప్రాధాన్యత ఉంటుంది. కావున $(a,b) \neq (b,a)$

Note : 1. $(a,b) = (c,d) \Rightarrow a = c$ & $b = d$

2. (a,b) అను క్రమయుగ్మంలో 'a' ను ప్రథమ నిరూపకం అనియూ, 'b' ను ద్వితీయ నిరూపకమనియూ అంటారు.

2. కార్టీజియన్ లబ్ధము : A, B లు రెండు సమితులు. $x \in A$, $y \in B$ అయ్యేట్లు వ్రాయడానికి వీలైన అన్ని (x,y) లను కలిగిన సమితిని A, B ల కార్టీజియన్ లబ్ధము అంటారు. సాంకేతికంగా $A \times B = \{(x,y) / x \in A \,\&\, y \in B\}$

Note : 1. $A \times B \neq B \times A$

2. $A \times \phi = \phi \times A = \phi$

3. $A \times B = \phi$ అయిన A,B లలో కనీసం ఒకటి శూన్య సమితి అగును

4. $n(A) = m$ and $n(B) = n$ అయిన $n(A \times B) = mn$

5. $n(A \times B) = n(B \times A)$

6. $A \neq \phi$ $\&\ B \neq \phi$ మరియు A,B లు 'n' ఉమ్మడి మూలకాలు కల్గి వున్న AXB, BXA లు 'n^2' ఉమ్మడి మూలకాలు కల్గి వుంటాయి.

3. సంబంధము : A,B అనేవి ఏవేని రెండు సమితులైన AXB యొక్క ఏ ఉపసమితినైనా A నుండి B కు ఒక సంబంధము అంటారు. సాంకేతికంగా $R \subseteq A \times B$ అయిన R ను A నుండి B కు ఒక సంబంధం అంటారు.

లేక

సంబంధం అనగా క్రమయుగ్మాల సమితి.

Note : 1. $R \subseteq A \times B$ ఒక సంబంధము $\{x \in A / (x,y) \in R\}$ ను R కు ప్రదేశం అనీ, $\{y \in B \ / (x,y) \in R\}$ ను R కు వ్యాప్తి అంటారు. అనగా R యొక్క ప్రదేశం $\subseteq A$, R యొక్క వ్యాప్తి $\subseteq B$ అగును.

2. B ను R యొక్క సహప్రదేశం అంటారు.

3. $n(A) = m$, $n(B) = n$ అయిన A నుండి B కు గల సంబంధాల సంఖ్య $= 2^{mn}$

4. **విలోమ సంబంధము :** $R \subseteq A \times B$, R అనేది A నుండి B కి ఒక సంబంధం అయిన $R^{-1} \subseteq B \times A$ అనగా R^{-1} ను B నుండి A కు R యొక్క విలోమ సంబంధము అంటారు.

ఉదా : 1. $R = \{(x,y), / x \in A, y \in B\}$ అయిన $R^{-1} = \{(y,x) / x \in A, y \in B\}$

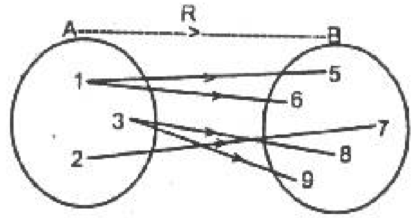
2. $R = \{(1,2), (3,5), (4,7)\}$ అయిన $R^{-1} = \{(2,1), (5,3), (7,4)\}$

Note : 1. R యొక్క ప్రదేశం = R^{-1} యొక్క వ్యాప్తి

2. R యొక్క వ్యాప్తి = R^{-1} యొక్క ప్రదేశం. 3. $(R^{-1})^{-1} = R$

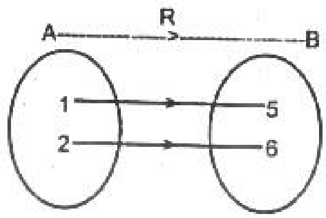
5. సంబంధాల్లో రకాలు : A, B లు రెండు సమితులు. $R \subseteq A \times B$ అనేది A నుండి B కు ఒక సంబంధం అవుతుంది.

I. ఏకబహు సంబంధము :- A లోని ఒక మూలకం B లోని ఒక మూలకం కన్నా ఎక్కువ మూలకాలతో జతపరచబడి వున్న R ను ఏక బహు సంబంధం అంటారు



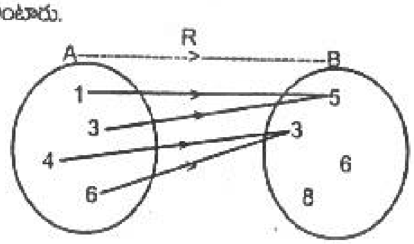
ఉదా : ∴ R అనే సంబంధం = { (1,5), (1,6), (2,7), (3,8), (3,9)} అనేది ఏక బహు సంబంధం.

ఏక - ఏక సంబంధం లేదా అన్వేక సంబంధం : A లోని ఒక మూలకం B లోని ఒక మూలకంతో జత పరచబడితే R ను ఏక - ఏక (లేదా) అన్వేక సంబంధం అంటారు.



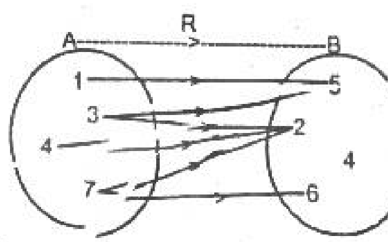
ఉదా : ∴ R అనే సంబంధం = { (1,5), (3,6) } అనేది అన్వేక సంబంధం

3. బహు ఏక సంబంధం : A లో ఒకటికన్నా ఎక్కువ మూలకాలు B లో ఒకే ఒక మూలకంలో జతపరచబడితే R ను బహు - ఏక సంబంధం అంటారు.



ఉదా : ∴ R అనే సంబంధం = { (1,5), (3,5), (4,3), (6,3) } అనేది బహు ఏక సంబందం

4. బహు - బహు సంబంధం : A లో ఒకటి కన్నా ఎక్కువ మూలకాలు, B లో ఒకటి కన్నా ఎక్కువ మూలగాలతో జతపరచబడి యున్న R ను బహు - బహు సంబంధం అంటారు.



ఉదా : ∴ R అనే సంబంధం = { (1,5), (3,5), (4,3) , (6,3) } అనేది బహు - బహు సంబంధం

6. సంబంధాలు ధర్మాలు : R ⊆ AXA లేదా R : A ---> A ఒక సంబంధం దీనిని R,A లో సంబంధం అని కూడా అంటారు

I. పరావర్తన సంబంధం : a ∈ A అయిన (a,a) ∈ R అయితే R సంబంధమును A లో పరావర్తన సంబంధం అంటారు.

ఉదా : 1. సంఖ్యా సమితులలో =, 2. సమితులలో ఉప సమితి ధర్మము మరియు 3. త్రిభుజాలలో సర్వసమానత్వము.

2. సౌష్టవ సంబంధము :- $a,b \in A$, $(a,b) \in R$ అయిన ప్రతి a,b లకు $(b,a) \in R$ అయితే ఆ సంబంధము A లో ఒక సౌష్టవసంబంధం అంటారు.

ఉదా : 1. సరళరేఖల సమితిలో సమాంతరత్వము, లంబంగా ఉండుట 2. త్రిభుజాల సమితిలో సర్వసమానత్వము.

3. సంక్రమణ సంబంధం : $a,b,c \in A$, $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$ అయినపుడు $(a,c) \in R$ అయితే R ను A లో సంక్రమణ సౌష్టవ సంబంధం అంటారు.

ఉదా : 1. సరళరేఖా సమితిలో సమాంతరత్వము

2. సంఖ్యా సమితిలో '>'

5. తుల్య సంబంధము : ఒక సంబంధము పరావర్తనం, సౌష్టవం, మరియు సంక్రమణం అయితే దానిని తుల్య సంబంధం అంటారు.

ఉదా : 1. త్రిభుజాల సమితిలో సర్వ సమానత్వము

a) $\Delta \cong \Delta$ (పరావర్తన)

b) $\Delta_1 \cong \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 \cong \Delta_1$ (సౌష్టవం)

c) $\Delta_1 \cong \Delta_2$, $\Delta_2 \cong \Delta_3 \Rightarrow \Delta_1 \cong \Delta_3$ (సంక్రమణం)

$\therefore \cong$ అనేది ఒక తుల్య సంబంధం.

Note : 1. R సౌష్టవ సంబంధం కావలెనన్న $R = R^{-1}$ కావాలి.

2. A సమితిలో "మూలకముల మధ్య సమానత్వము" అతి చిన్న తుల్య సంబంధం.

3. A సమితిలో పెద్ద తుల్య సంబంధం తుల్యసంబంధం.